



**Филиал «Центр педагогических измерений»
АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы»**

Математическая грамотность учащихся Учебное пособие

Астана, 2014 год

Математическая грамотность учащихся. Учебное пособие. Филиал «Центр педагогических измерений» АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы». Астана, 2014 год.

Учебное пособие содержит краткую информацию об исследовании PISA и результаты исследований PISA учащихся Казахстана по математической грамотности, а также методологические основы для формирования математической грамотности.

В учебном пособии даны образцы заданий с рекомендациями по их выполнению и схема оценивания для подготовки учащихся к исследованию PISA по оценке математической грамотности.

Учебное пособие предназначено для широкого круга лиц: учащихся и учителей, студентов педагогических вузов, представителей органов управления образования, специалистов, занимающихся вопросами оценки качества образования.

Содержание

	Введение	4
1	Структура тестовых заданий PISA по математической грамотности	6
2	Образцы заданий с рекомендациями по их выполнению для подготовки учащихся к исследованию PISA по оценке математической грамотности	8
2.1	Список формул	44
3	Классификация примеров тестовых заданий по математической грамотности	45
	Библиография	48

ВВЕДЕНИЕ

Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся (далее – PISA) осуществляется Организацией экономического сотрудничества и развития (далее – ОЭСР).

Целью исследования PISA является оценка владения учащимися знаниями и умениями, необходимыми для полноценного функционирования в обществе. Дополнительно к оценке образовательных достижений изучается влияние на эти достижения различных факторов, связанных с учащимися и их семьями, школой и образовательными возможностями, существующими вне школы.

Объектом исследования являются образовательные достижения учащихся 15-летнего возраста. Такой выбор учащихся объясняется тем, что во многих странах к этому возрасту завершается обязательное обучение в школе, и программы обучения в разных странах имеют много общего. Именно на данном этапе образования важно определить состояние тех знаний и умений, которые могут быть полезны учащимся в будущем, а также оценить способности учащихся самостоятельно приобретать знания, необходимые для успешной адаптации в современном мире.

В данное учебное пособие включены образцы тестовых заданий PISA по математической грамотности.

Исследование PISA определяет математическую грамотность как способность учащихся формулировать, применять и интерпретировать проблемы в различных контекстах, используя математические факты и формулы.

Типы вопросов

В исследовании PISA используются три типа вопросов:

- 1) вопросы с множественным выбором ответа;
- 2) вопросы, требующие краткого ответа;
- 3) вопросы, требующие развернутого ответа.

Результаты исследования PISA учащихся Казахстана

Результаты исследования PISA демонстрируют, что показатели по Казахстану в области математической грамотности значительно улучшились в 2012 году по сравнению с 2009 годом. Отставание по отношению к среднему показателю по странам ОЭСР было сокращено с 91 до 62 баллов. Таблицы 1.1 и 1.2 показывают, что учащиеся в Казахстане имеют самые низкие баллы по области «неопределенность и данные» и по компетенции «интерпретация».

Компетенция «Интерпретация» является самой сложной из трех математических компетенций и относится к навыкам, требующим высокого уровня мышления в соответствии с таксономией Блума.

Математическая область «Неопределенность и данные» состоит из компонентов «вычисление вероятности» и «статистика».

Таблица 1.1. Средние баллы в исследовании PISA для различных видов областей.

2012 год	Изменения и отношения	Пространство и форма	Количество	Неопределенность и данные
Казахстан	433 баллов	450 баллов	428 баллов	414 баллов
ОЭСР	493 баллов	490 баллов	495 баллов	493 баллов
Разница	–60 баллов	–40 баллов	–67 баллов	–79 баллов

Таблица 1.2. Средние баллы в исследовании PISA для различных видов математических компетенций.

2012	Формулирование	Применение	Интерпретация
Казахстан	442 баллов	433 баллов	420 баллов
ОЭСР	492 баллов	493 баллов	497 баллов
Разница	–50 баллов	–60 баллов	–77 баллов

1. СТРУКТУРА ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ PISA ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

Целью исследования PISA в области математики является определение уровня математической грамотности 15-летних учащихся. В документе «Структура PISA по математике - 2012» (ОЭСР, 2013) математическая грамотность определяется следующим образом.

Математическая грамотность – это способность учащегося формулировать, применять и интерпретировать математику в различных контекстах. Она включает математическое мышление и использование математических понятий, процедур, знаний и инструментов, которыми описываются, объясняются и предсказываются явления. Это помогает людям признать роль, которую математика играет в мире, формировать осознанные точки зрения и принимать хорошо продуманные решения, необходимые для конструктивных, заинтересованных и мыслящих граждан.

В исследовании PISA математическая грамотность оценивается на основе ряда тестовых вопросов, для которых необходим актуальный анализ, рассуждение и решение математических задач. Учащиеся должны решать количественные и геометрические задачи и проанализировать ситуации с помощью математических стратегий и интерпретаций.

Исследования PISA осуществляется по четырем математическим областям:

1. Область *«Пространство и форма»* касается пространственных и плоских геометрических форм и их свойств. Другое название этой области – *геометрия*. Здесь рассматриваются задания на распознавание форм в различных представлениях и размерах, определение сходств и различий форм, а также понимание свойств объектов.

2. Область *«Изменения и отношения»* наиболее тесно связана с алгеброй. В данной области рассматриваются задания на математическое описание зависимости между переменными в различных процессах. Область охватывает такие понятия как уравнения, неравенства, эквивалентность и делимость. *Отношения* в математическом смысле могут быть визуализированы различными способами, например, в виде формул, графиков и таблиц. В этой области также уделяется внимание связям между различными формами представления информации.

3. К области *«Неопределенность и данные»* относятся вопросы вероятностного и статистического характера. Эту область можно также назвать *вычисление вероятности и статистика*.

4. Область *«Количество»* включает в себя количественные соотношения и закономерности. К этой области относятся такие понятия как количественные представления, вычисление площади и объема, устный счет, приближенное вычисление и понимание смысла математических операций. Эта область наиболее тесно связана с *арифметикой*.

Эти математические области предлагаются в различных контекстах: *задачи из области личной жизни* (личное), *задачи связанные с профессиональной деятельностью* (профессиональное), *связанные с обществом* (публичное), и *научно-*

ориентированные задачи (научное). Этим подчеркивается важная роль, которую математика играет в современном мире.

Для успешного выполнения заданий теста PISA по математике учащийся должен обладать следующими компетенциями: *формулирование, применение и интерпретация.*

Под *формулированием* подразумевается выявление возможностей для применения и использования математики. При этом в процессе решения задачи нужно выяснить, какой существенный математический аспект можно применить для ее анализа. Например, перевести контекст в соответствующую математическую модель (которая должна быть впоследствии решена).

Под *применением* подразумевается использование математических знаний, понятий, инструментов для решения задач. Кроме того, учащийся должен уметь упрощать ситуации или задачи для того, чтобы сделать возможным использование математических инструментов при выполнении вычислений, алгебраических действий и анализе математических ситуаций.

Интерпретация предусматривает размышление о выборе, рациональности, целесообразности математического решения и рассуждение в отношении конкретной задачи. Данная компетенция требует от учащегося нахождения закономерностей, проведения обобщения, обоснования и объяснений полученных результатов.

Ниже указана ссылка на английскую версию примерных тестовых заданий PISA по математической грамотности, разрешенных для опубликования.

<http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012-2006-rel-items-maths-ENG.pdf>

2. ОБРАЗЦЫ ЗАДАНИЙ С РЕКОМЕНДАЦИЯМИ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ PISA ПО ОЦЕНКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

Задание №1 Марафон

Характеристика вопросов задания №1

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1		x			x					x			x	
2			x											x

Задание №1 Марафон

22 апреля 1990 года на улицах Роттердама проводился марафон.

Для проверки того, действительно ли расстояние, которое должны пробежать атлеты, составляет 42 195 метра, по улицам проводят мелом черту. Затем вдоль этой линии проходят колесом с установленным на нем счетчиком, который подсчитывает количество оборотов.

1. Диаметр колеса 70 см. Какой показатель будет у счетчика после завершения подсчета?
2. Один человек использует велосипедное колесо вместо стандартного. Диаметр велосипедного колеса вместе с шиной тоже 70 см. Через какое-то время шина начинает постепенно сдуваться.
Как это повлияет на конечный показатель?
Поясните свой ответ.

Рекомендации по выполнению задания

1. Внимательно прочитайте условие задачи и обратите внимание на то, что счетчик считает количество оборотов, а не расстояние в метрах.
 - Примените формулу для нахождения длины окружности $C = \pi D$;
 $C = \pi \cdot 70 = 3,14 \cdot 70 = 219,8$ (см) или 2,198 (м).
 - Определите взаимосвязь между длиной обода колеса и расстоянием, которое проходит колесо за один оборот.
 - Разделите длину марафонской дистанции на длину обода колеса и получите искомую величину, то есть показание количества оборотов на счетчике.
 $42\,195 : 2,198 \approx 19\,197$ оборотов.
2.
 - В связи с тем, что шина постепенно сдувается, диаметр колеса уменьшается.
 - Уменьшение диаметра колеса ведет к уменьшению длины обода колеса, следовательно, к увеличению количества оборотов.
 - Соответственно, показание счетчика возрастает.

Схема оценивания

- | | |
|---|---|
| 1. Максимальное количество баллов 3 | |
| 19197 (в зависимости от того, какое π было выбрано) | 3 |
| 2. Максимальное количество баллов 3 | |
| Диаметр уменьшается, показатель счетчика возрастает | 3 |

Задание №2 Шоколад

Характеристика вопросов задания №2

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1			x	x					x				x	
2			x										x	
3			x											x

Задание №2 Шоколад

Фирма по производству сладостей выпускает шоколадные палочки BASITA. Шоколадные палочки упаковываются в коробочки.

На расположенном ниже рисунке вы видите модель такой коробочки. У коробочки форма полуцилиндра с высотой 15 см. Верхняя и нижняя поверхности – два полукруга с диаметром 9 см.



1. На передней поверхности коробочки написано слово BASITA (смотрите на фото выше). Справа и слева от надписи сделан отступ в 1 сантиметр.
→ Подсчитайте (не измеряйте) в мм точную длину слова BASITA. Напишите свои расчеты.
2. Для облегчения открывания коробочки на передней части под словом BASITA находится полоска шириной 1,5 см. Эта полоска расположена на 3 см ниже от верхней части.
→ В прилагаемом бланке ответов к вопросу 2 нарисуйте развертку коробочки и покажите в ней полоску для открывания коробочки.
3. Производитель хочет выставить на витрине большую модель коробочки. Линейные размеры такой модели в шесть раз больше, чем размеры оригинала коробочки. Поверхность оригинала коробочки $410,535 \text{ см}^2$.
→ Подсчитайте в см^2 поверхность большой модели. Напишите свои расчеты.

Рекомендации по выполнению задания

1.
 - Внимательно прочитайте условие задачи и обратите внимание на то, что слово BASITA написано на полуцилиндре, и поэтому длина этого слова равна длине полуокружности за минусом отступов от краев.
 - Примените формулу для нахождения длины полуокружности $C = \frac{\pi D}{2}$;

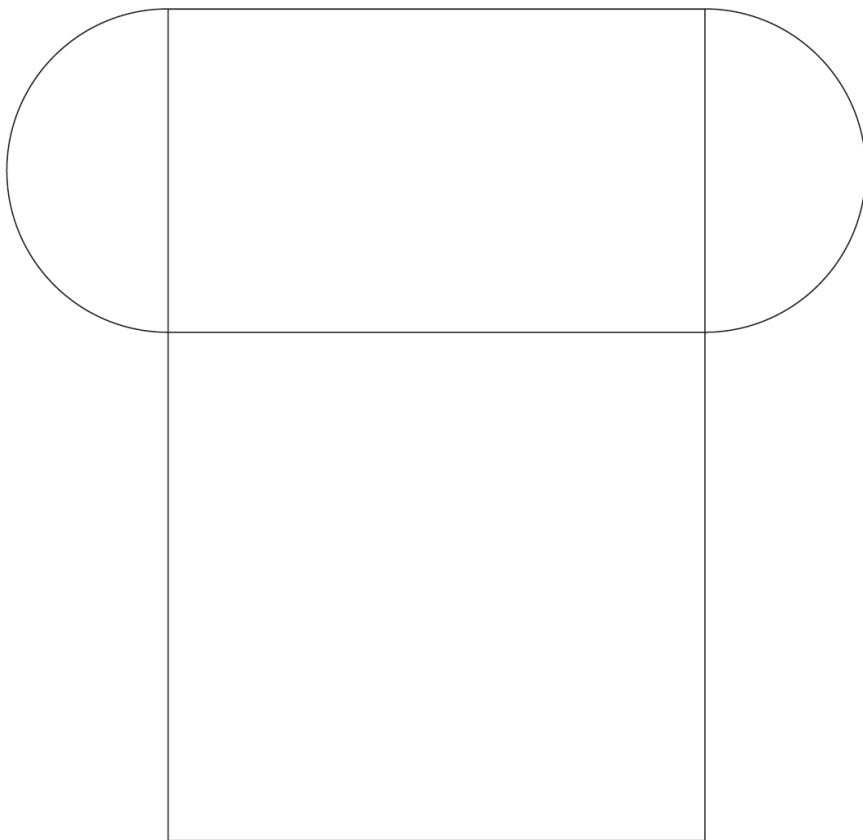
$$C = \frac{3,14 \cdot 9}{2} = 14,13 \text{ (см)}, \text{ тогда длина слова BASITA равно:}$$

$$14,13 - 2 = 12,13 \text{ (см)} = 121,3 \text{ (мм)}.$$
2. В прилагаемом бланке ответов к вопросу 2 дан чертеж коробочки в развернутом виде. Нужно разобраться, что верхний прямоугольник – это задняя стенка коробки, нижний прямоугольник – это передняя полуцилиндрическая стенка коробки, а по бокам верх и низ коробки – полукруги. Тогда полоску нужно изобразить на нижнем прямоугольнике в виде двух вертикальных линий с левого или правого границ без разницы, расположенных на расстоянии 1,5 см – первая линия, и 0,75 см от первой линии – вторая линия, так как дан масштаб 1:2.
3.
 - Размеры модели в шесть раз больше, чем размеры оригинала коробочки. Учитывая, что площади относятся как квадраты коэффициента отношения, имеем, что отношение площади поверхности модели к площади поверхности оригинала будет равно $6^2 = 36$.
 - Площадь поверхности модели будет равна произведению этого числа на площадь поверхности оригинала, то есть $410,535 \cdot 36 = 14779,26 \text{ (см}^2\text{)}$.
 - Найдите по отдельности площади поверхностей каждой из частей и, складывая их, проверьте общую площадь. Площадь задней поверхности $15 \cdot 9 \cdot 36 = 4860 \text{ (см}^2\text{)}$.
Площадь передней части $15 \cdot 4,5 \cdot 3,14 \cdot 36 = 7630,2 \text{ (см}^2\text{)}$.

Площади двух полукругов $4,5^2 \cdot 3,14 \cdot 36 = 2289,06 \text{ (см}^2\text{)}$.
Всего $(4860 + 7630,2 + 2289,06 \dots \approx) 14779,26 \text{ (см}^2\text{)}$.

Бланк ответов

Масштаб 1:2



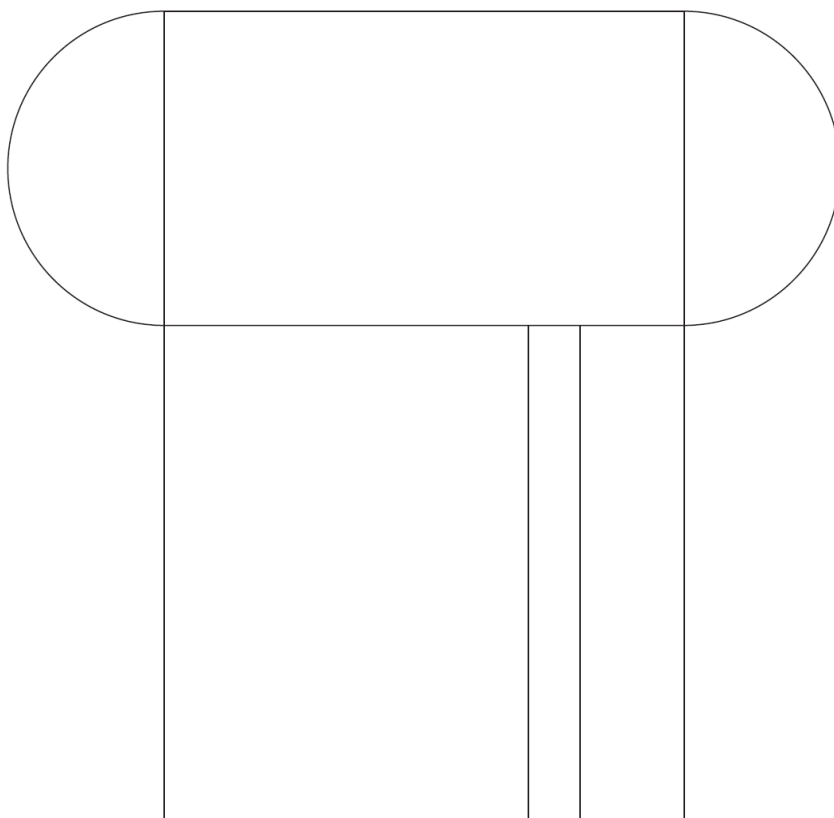
1. Максимальное количество баллов 4

- Окружность полукруга $\left(\frac{\pi \cdot 9}{2} = \right) 14,13\dots$ (см) 2
- Остается $(14,13\dots - 2 =) 12,13\dots$ (см) 1
- Длина слова “BASITA” 121,3 (мм) или 12,13 (см) 1

2. Максимальное количество баллов 3

- Сделан рисунок прямоугольника (полоски) 1
- Первая линия расположена ниже верхнего края на 1,5 см 1
- Вторая линия расположена ниже первой линии на 0,75 см 1

Например, в масштабе 1:2



Примечание

Полоску можно рисовать в прямоугольнике справа или слева.

3. Максимальное количество баллов 4

- Поверхность модели увеличится в $(6^2 =)$ 36 раз 2
- Поверхность модели $(36 \cdot 410,535 =)$ 14 779,26 (см²) 2
или
- Поверхность задней части $(90 \cdot 54 =)$ 4860 (см²) 1
- Поверхность передней части $(90 \cdot 84,78 =)$ 7630,2 (см²) 1
- Поверхность верхней и нижней части
 $(\pi \cdot 27^2 =)$ 2289,06 (см²) 1
- Всего $(4860 + 7630,2 + 2289,06 \dots \approx)$ 14779,26 (см²) 1

Задание №3 Маяк

Характеристика вопросов задания №3

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1		x			x		x			x		x		
2			x											x
3			x											x

Задание №3 Маяк

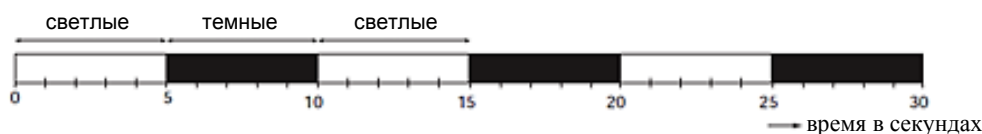
Ночью маяк подает световые сигналы, чтобы корабли могли определить свое местонахождение. Каждый маяк делает это по-своему. Подача световых сигналов происходит через одинаковые периоды времени.

На фотографии изображен маяк Схауэна.



Ниже вы видите четыре примера световых сигналов различных маяков. Светлым прямоугольником обозначена продолжительность времени, когда корабли могут видеть световой сигнал, а черным - когда они его не видят.

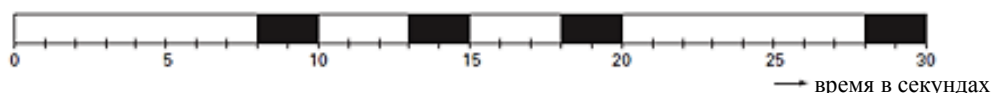
1. Световые сигналы маяка Эгмонда.



2. Световые сигналы одного из маяков Эймёйдена.



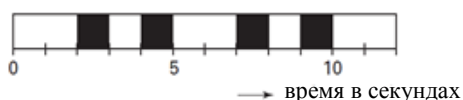
3. Световые сигналы маяка Нордвейка.



4. Световые сигналы маяка Схауэна.



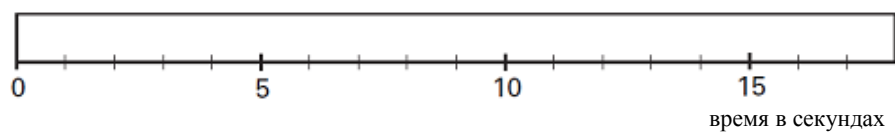
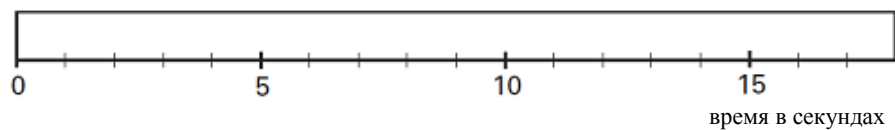
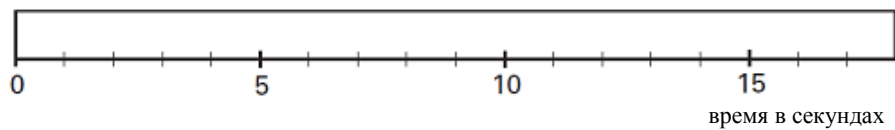
Ниже вы видите световые сигналы, подаваемые другим маяком. Этот маяк подает световые сигналы протяженностью две секунды или одна секунда.



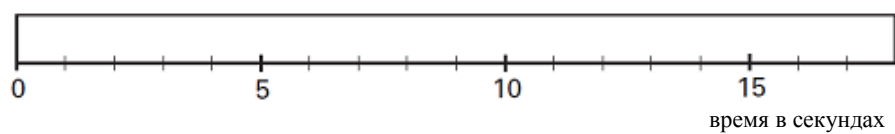
1. Сколько секунд длится один период этого маяка?
2. Марат утверждает, что этот маяк подает 25 световых сигналов в минуту. Докажите, что Марат не прав.
3. Другой маяк за период в девять секунд подает три световых сигнала. Начертите в бланке ответов к вопросу два периода световых сигналов, которые могут относиться к данному маяку.

Бланк ответов

Черновик



Чистовик



Рекомендации по выполнению задания

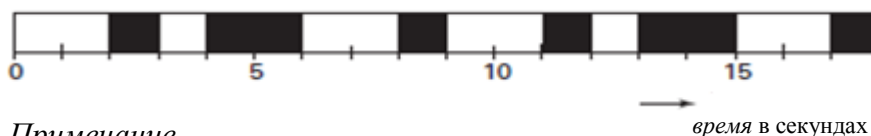
1. Внимательно рассмотрите рисунок чередования сигналов данного маяка, определите их периоды. Как видно из рисунка, за 10 с маяк делает две одинаковые серии сигналов, т.е. период – 5с.
2. За эти 5 с подано 2 сигнала, следовательно, за одну минуту количество сигналов: $2 \cdot 12 = 24$. Марат не прав.
3. На полоске изобразите два периода по 9 с. Первую часть разделите на 6 частей для изображения 3 светлых и 3 темных чередующихся прямоугольников (сигналов). Длина прямоугольников – произвольная, но при этом концы первой части полоски должны быть разные по цвету. Повторите данную процедуру для второй части полоски.



Схема оценивания

1. **Максимальное количество баллов 2**
5 (секунд) 2
2. **Максимальное количество баллов 3**
 - Можно увидеть 2 световых сигнала каждые 5 секунд 1
 - За одну минуту можно увидеть $\left(\frac{60}{5} \cdot 2 =\right)$ 24 световых сигнала, 2
т.е. Марат не прав.
или
 - Начертить рисунок со световыми сигналами для промежутка в 60 секунд и таким образом сделать вывод о том, что Марат не прав.
3. **Максимальное количество баллов 4**

Например:



Примечание

Если начало и конец периодов оба светлые или оба темные, то вычесть за это 2 балла.

Задание №4 Четыре варианта выбора

Характеристика вопросов задания №4

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1			x			x	x			x			x	
2			x											x
3			x											x

Задание №4 Четыре варианта выбора

В данном задании надо дать оценки по тестам, состоящим из вопросов с четырьмя вариантами ответов, из которых один правильный.

Существует несколько способов перевода количества правильных ответов в оценку.

Первый способ

По тесту, состоящему из 40 вопросов с четырьмя вариантами ответа, оценка определяется следующим образом:

- если нет ни одного правильного ответа, кандидат получает 1 балл;
- если все ответы правильные, получает 10 баллов;
- остальные девять баллов распределяются равномерно между 40 вопросами

1. Согласно этому способу вычислите оценку, если на 60% вопросов дан правильный ответ.

Запишите ответ с точностью до десятых.

Второй способ

Выполняя тест с вопросами множественного выбора, можно ответить правильно на некоторые вопросы наугад, даже если ничего не знать из учебного материала.

Согласно этому способу при определении оценки учитывается момент угадывания.

Тест состоит из 40 вопросов. Используется следующая формула при учете ответов наугад.

$$O = 0,3 \cdot P - 2$$

O - это оценка, P - количество правильно решенных вопросов.
Если O ниже 1, то оценка будет 1.

Представьте себе, что выполняя тест, учащийся правильно ответил на 20 вопросов, а остальные 20 он выбирал ответы наугад.

2. Какую оценку он получит в соответствии с *ожиданиями*? Поясните свой ответ.

Общий способ

До сих пор речь шла о тестах с 40 вопросами с четырьмя вариантами ответа. В таком тесте может быть меньше (или больше) вопросов. Удобно использовать следующую формулу:

$$O = 12 \cdot \frac{P}{B} - 2$$

В этой формуле

- O - оценка. Если O ниже 1, то оценка будет 1;
- P - количество правильно решенных вопросов;
- B - количество вопросов по тесту.

Одноклассник Асем должен сдать пропущенный тест. Он спрашивает ее, сколько вопросов было в тесте. Она уже не помнит, но она помнит, что у нее было 42 правильно решенных вопросов, и за это она получила оценку 7,7.

3. Вычислите количество вопросов в данном тесте.

Рекомендации по выполнению задания

1. Первый метод решения

Учитывая то, что правильно ответили больше чем на один вопрос, девять баллов равномерно распределены между 40 вопросами.

Оценка за 60% правильных ответов будет: $9 \cdot 0,6 = 5,4$.

1 балл получает при любом раскладе, поэтому:

$$O = 1 + 5,4 = 6,4$$

или

Второй метод решения

Найдите количество правильно решенных вопросов: $40 \cdot 0,6 = 24$;

Если учесть, что за каждый правильно решенный вопрос дается $\frac{9}{40}$ баллов, то

получим оценку $\frac{9}{40} \cdot 24 = 5,4$ за 24 правильно решенных вопросов. Учитывая,

что один балл уже есть, к нему добавляем полученные баллы:

$$O = 1 + 5,4 = 6,4.$$

2. По условию из 40 вопросов правильно ответили на 20, на остальные 20 вопросов ответы выбраны наугад. В соответствии с ожиданиями в каждом вопросе правильный ответ будет выбран с вероятностью $\frac{1}{4}$. Учитывая это, получим еще $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ правильных ответов. Используя данную в условии формулу, посчитаем баллы:
 $P = 20 + 5 = 25$ правильных ответов, получаем $O = 0,3 \cdot 25 - 2 = 5,5$.
3. Асем ответила правильно на $P = 42$ вопроса, получила $O = 7,7$ балла. Подставьте эти данные в формулу $7,7 = 12 \cdot \frac{42}{B} - 2$ и вычислите B . $B = \frac{504}{9,7} = 51,958 \approx 52$; следовательно, в тесте было примерно 52 вопроса.

Схема оценивания

1. Максимальное количество баллов 3

- При одном и более правильном ответе, девять баллов равномерно распределяются между 40 вопросами 1
- 60% от девяти баллов это 5,4 балла 1
- Оценка $1 + 5,4 = 6,4$ 1
- или
- Количество правильных ответов $0,6 \cdot 40 = 24$ 1
- За каждый правильно решенный вопрос получает $\frac{9}{40}$ баллов 1
- Оценка $1 + \frac{9}{40} \cdot 24 = 6,4$ 1

2. Максимальное количество баллов 4

- Наугад отвечая на вопрос с четырьмя вариантами ответов, в одном из четырех случаев делается правильный выбор 1
- Из 20 вопросов с четырьмя вариантами ответов получается в соответствии с ожиданиями $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ правильных ответов 1
- Всего в соответствии с ожиданиями 25 правильных ответов 1
- Соответствующая оценка $O = 0,3 \cdot 25 - 2 = 5,5$ 1

3. Максимальное количество баллов 4

- Количество правильных ответов $P = 42$ 1
- В таком случае получаем уравнение: $\frac{504}{B} - 2 = 7,7$ 1
- $B \approx 51,96$ 1
- В тесте 52 вопроса 1

Задание №5 Восьмигранные игральные кости

Характеристика вопросов задания №5

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1		х				х		х				х		
2			х										х	
3			х											х

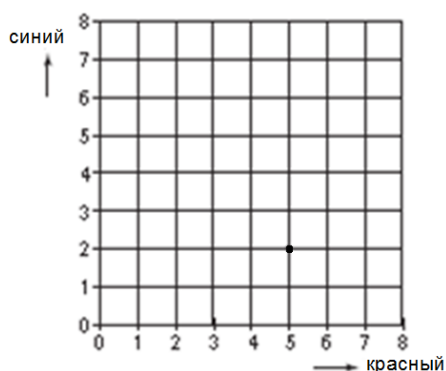
Задание №5 Восьмигранные игральные кости



Руслан один раз кидает две (красную и синюю) игральные кости в форме восьмигранника. Он называет это бросок. Потом он подсчитывает сумму всех цифр, выпавших на верхних гранях. В ситуации, изображенной на фотографии, у него выпало 10 очков за один бросок. У каждого восьмигранника равное количество шансов выпадения цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

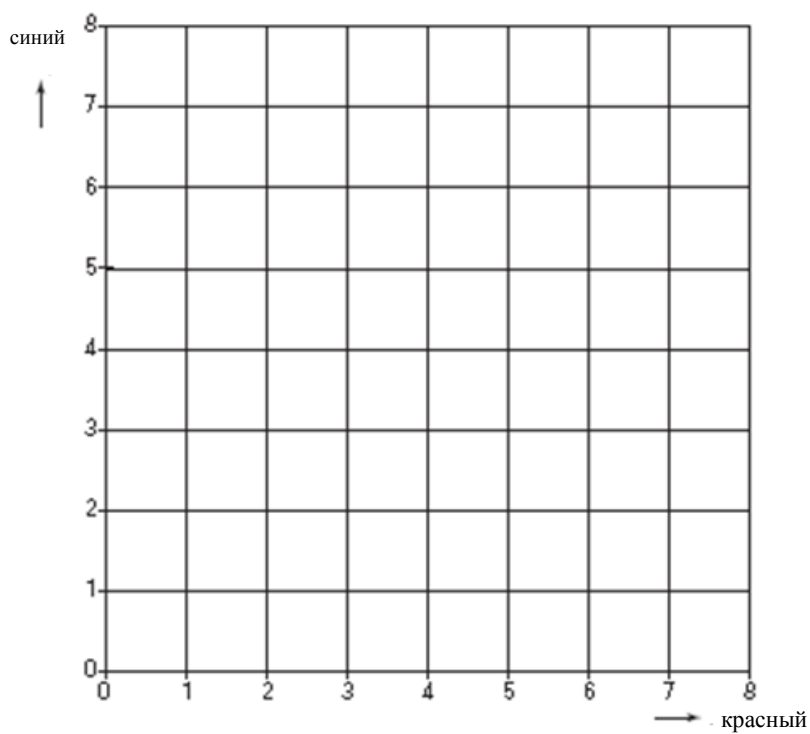
- У Руслана есть четыре способа получить в сумме пять за один бросок.
→ Напишите эти четыре способа.

При бросании костей, одним из возможных исходов является (5; 2). Это означает, что у Руслана выпала пятерка на красной кости и двойка - на синей. В изображенной ниже таблице бросок обозначен одной точкой. В бланке ответов к вопросу 2 нарисована таблица с клетками.

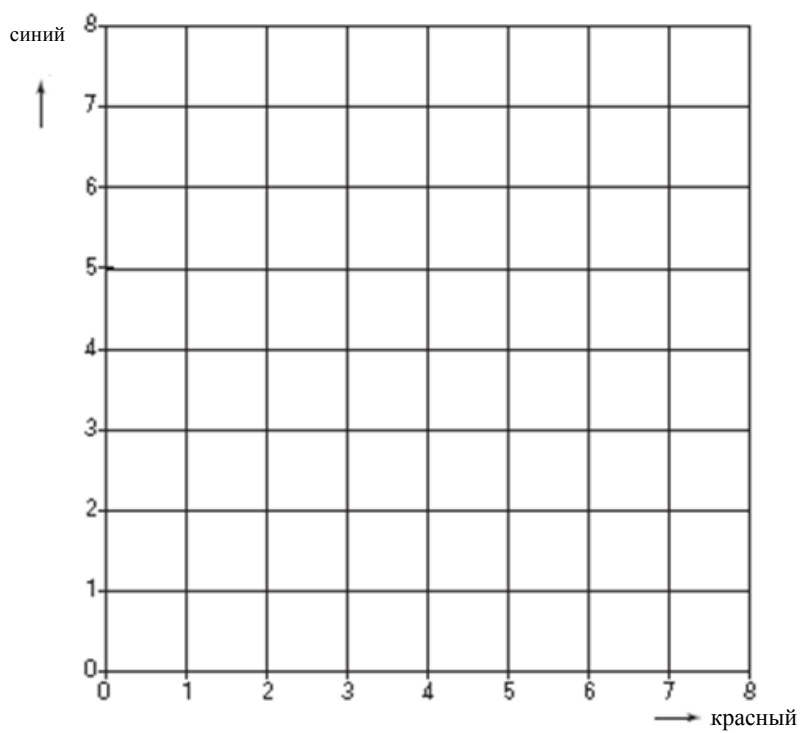


2. Руслан получает одним броском восьмерку.
→ Укажите в бланке ответов к вопросу 2 все возможные броски, при которых в общей сложности получается восьмерка.
3. Руслан бросает 320 раз две игральные кости в форме восьмигранника.
→ Сколько раз, согласно вашим ожиданиям, он может выбросить в общей сложности шестерку? Покажите, как вы пришли к такому ответу. Можно использовать таблицу в бланке ответов к вопросу 3.

2.

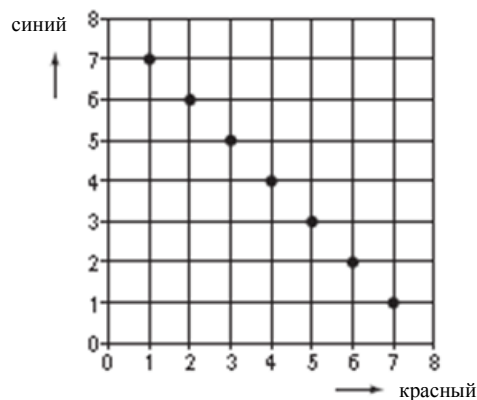


3.



Рекомендации по выполнению задания

1. На двух игровых костях выпадает в сумме 5 баллов. Это может выглядеть следующим образом: (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1).
2. Возможные комбинации для 8 очков: (1; 7), (7; 1), (2; 6), (6; 2), (5; 3), (3; 5), (4; 4):



3.
 - При бросании двух костей всего возможных различных вариантов будет $8 \cdot 8 = 64$.
 - 6 баллов возможно получить в 5 случаях: (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1), значит ожидание равно $\frac{5}{64}$.
 - Количество баллов при бросании игровых костей 320 раз с ожиданием $\frac{5}{64}$, для этого умножим эти числа и получим количество выпадения 6 баллов у Руслана: $\frac{5}{64} \cdot 320 = 25$ раз.

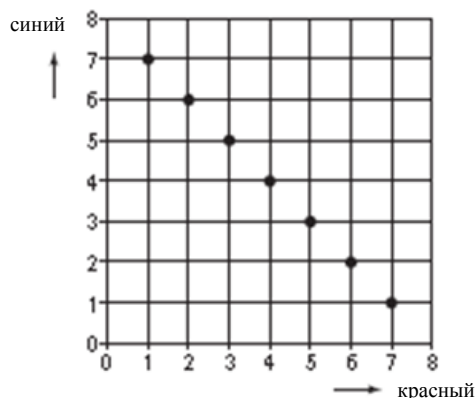
1. Максимальное количество баллов 3

Возможные варианты 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3 и 3 + 2

Примечание

За каждый пропущенный или ошибочный вариант вычесть один балл, максимально до 3 баллов.

2. Максимальное количество баллов 3



Примечания

За каждый пропущенный или ошибочный пункт вычесть один балл, максимально до 3 баллов.

Если отмечены (8,0) и (0,8), вычесть за это в общей сложности 1 балл.

Если через точки проведена линия, вычесть за это в общей сложности 1 балл.

3. Максимальное количество баллов 4

- Всего 64 комбинации цифр 1
- В 5 из 64 комбинаций в общей сложности получается шестерка 1
- $\frac{5}{64} \cdot 320$ 1
- Согласно ожиданиям, Руслан выбросит шестерку 25 раз 1

Задание №6 Фасадный флаг

Характеристика вопросов задания №6

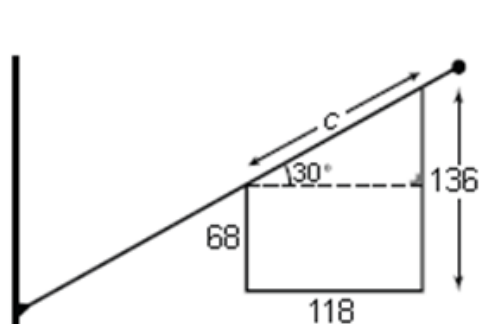
Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1			x	x					x				x	
2			x										x	

Задание №6 Фасадный флаг

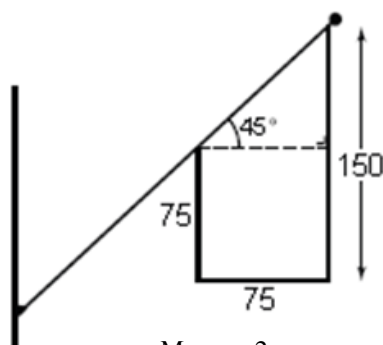
На фотографии справа изображены несколько фасадных флагов. Благодаря своей форме, эти флаги всегда висят прямо вниз. В таком случае на них полностью видно изображение.



Фасадный флаг всегда производится с углом в 30 или 45 градусов. Есть две модели флагов. Смотрите рисунки ниже. Размеры указаны на рисунках.



Модель 1



Модель 2

1. Вычислите длину c в сантиметрах у модели 1. Округлите до целых сантиметров. Запишите свои расчеты.
2. Цена флага зависит от площади его поверхности.
→ Вычислите в см^2 площадь поверхности модели 2. Запишите свои расчеты.

Рекомендации по выполнению задания

1. На модели 1 рассмотрите отделенную пунктиром часть флага – это прямоугольный треугольник, в котором можно найти катеты, c – гипотенуза. Гипотенузу можно найти, используя теорему Пифагора ($c^2 = a^2 + b^2$). Катет, лежащий против угла в 30° равен $136 - 68 = 68$, а гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{118^2 + 68^2} = \sqrt{18548} = 136,19 \approx 136$ (см).
2. На модели 2 флаг состоит из двух частей: квадрата со стороной 75 см и прямоугольного треугольника с острым углом 45° и катетами 75 см. Найдите площади частей и сложите их.
Площадь квадрата: $75^2 = 5625$ (см^2)
Площадь прямоугольного треугольника как половина площади квадрата: $5625 : 2 = 2812,5$ (см^2).
Общая их площадь или площадь флага: $5625 + 2812,5 = 8437,5$ (см^2).

Схема оценивания

1. Максимальное количество баллов 4

- | | |
|---|---|
| • Сторона, лежащая против угла в 30° ($136 - 68 =$) 68 | 1 |
| • По теореме Пифагора, $c^2 = 118^2 + 68^2$ | 1 |
| • $c^2 = 18\,548$ | 1 |
| • $c \approx 136$ (см) | 1 |

2. Максимальное количество баллов 3

- | | |
|---|---|
| • Площадь поверхности квадрата ($75 \cdot 75 =$) 5625 см^2 | 1 |
| • Площадь поверхности треугольника ($0,5 \cdot 75 \cdot 75 =$) $2812,5 \text{ см}^2$ | 1 |
| • Площадь поверхности флага ($5625 + 2812,5 =$) $8437,5$ (или 8438) (см^2) | 1 |

Задание №7 Тарифы на такси



Характеристика вопросов задания №7

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1			x		x					x			x	
2			x										x	
3			x											x

Задание №7 Тарифы на такси

Цена проезда на такси определяется посадочным тарифом и километровым тарифом. За проезд не более двух километров взимается только посадочный тариф. Если поездка превышает два километра, то за каждый дополнительный километр добавляется еще определенная сумма.

Тарифы в фирме «Пентакс» на легковой автомобиль-такси и на такси-минивэн указаны в таблице ниже.

Вид транспорта	Посадочный тариф, включая первые 2 км	Километровый тариф за каждый дополнительный к километр
Легковой автомобиль-такси (максимум 4 человека) 	6,00 евро	2,00 евро
Такси-минивэн (максимум 8 человек) 	12,25 евро	2,50 евро


- Ислам и Марат садятся у вокзала в легковой автомобиль-такси, чтобы проехать 5 километров до музея. Каждый из них платит по 6 евро.

В музее Ислам и Марат встретили троих друзей. Они решили взять на обратный путь до вокзала такси-минивэн и поделить расходы.

→ Подсчитайте, на сколько евро меньше придется заплатить Исламу за обратную дорогу до вокзала, чем за дорогу до музея. Запишите свои расчеты.

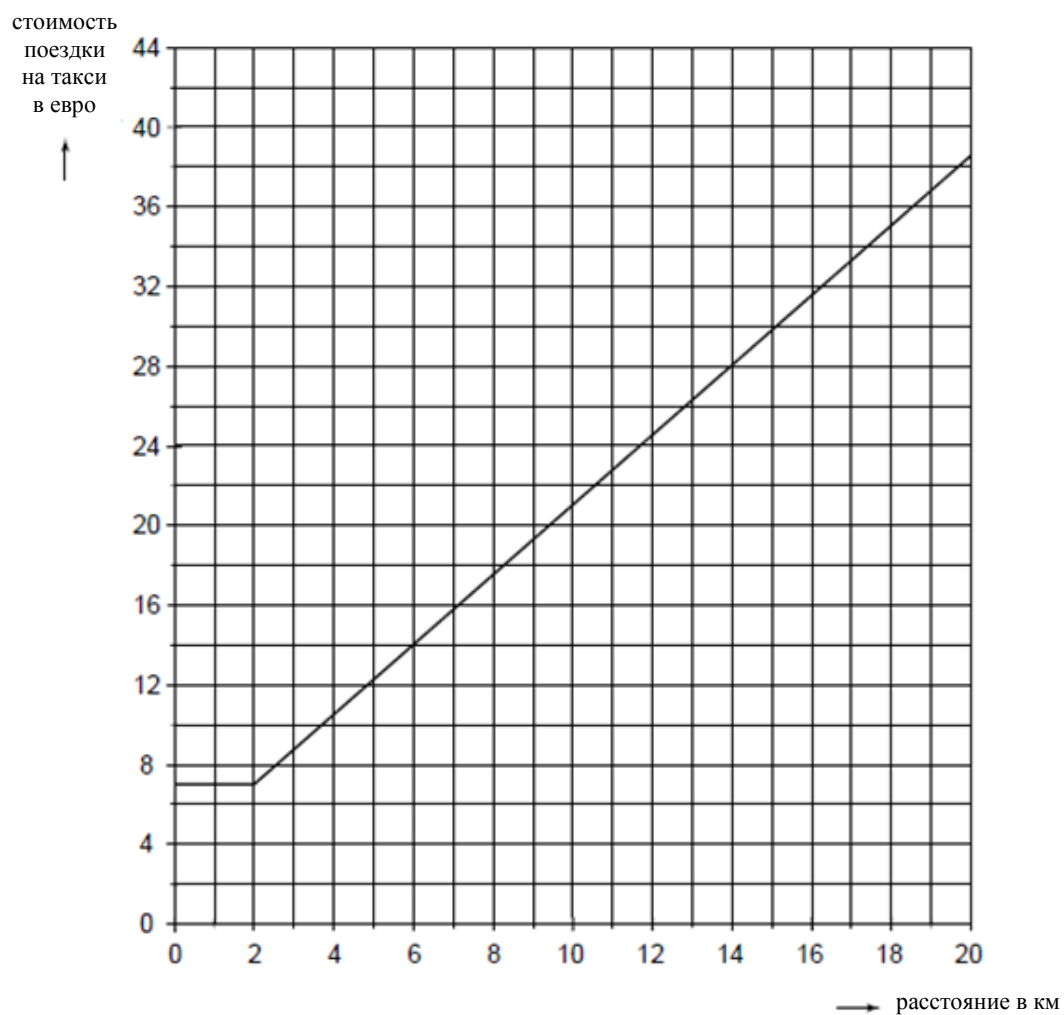
Фирма такси имеет дневной и ночной тариф.

В таблице, приведенной ниже, эти тарифы указаны для легковых автомобилей-такси.

	Посадочный тариф, включая первые 2 км	Километровый тариф за каждый дополнительный км
Дневной тариф (с 6:00 до 20:00)	6,00 евро	2,00 евро
Ночной тариф (с 20:00 до 6:00)	7,00 евро	1,75 евро

В бланке ответов нарисован график для ночного тарифа.

- Определите, начиная с какого целого числа километров по ночному тарифу в «Пentakсе» поездка на такси будет стоит больше 25 евро. Покажите, как вы пришли к такому ответу. Вы можете использовать график на бланке ответов.
- При каком количестве километров поездка на такси будет стоить одинаково по дневному и по ночному тарифу? Покажите, как вы пришли к такому ответу. Вы можете использовать график на бланке ответов.



Рекомендации по выполнению задания

1. От музея до вокзала стоимость проезда на такси-минивэне: $12,25 + 3 \cdot 2,5 = 19,75$ (евро).
Рассчитайте на одного человека: $19,75 : 5 = 3,95$ (евро).
Разница стоимости будет $6 - 3,95 = 2,05$ (евро). Исламу обратная дорога обошлась дешевле на 2,05 (евро), чем дорога в музей.
2.
 - Сделайте расчеты по ночному тарифу за 12 км = 10 + 2 км:
 $7 + 1,75 \cdot 10 = 24,5$ (евро).
Сделайте расчеты по ночному тарифу за 13 км = 11 + 2 км:
 $7 + 1,75 \cdot 11 = 26,25$ (евро). Начиная с 13 км поездка на такси будет дороже чем 25 евро.
 - На графике начертите горизонтальную линию, соответствующую 25 евро. Найдите точку пересечения этой линии с графиком, и посмотрите скольким километрам это соответствует.
 - Можно также сделать расчет: $25 - 7 = 18$ (евро), $18 : 1,75 = 10,28$ (км).
Берете большее целое значение: $2 + 11 = 13$ (км).
Ответ: поездка на такси будет стоит больше 25 евро начиная с 13 км.
3. Начертите графики проезда по дневному и ночному тарифам, для этого возьмите по 2 точки с целыми координатами: для дневного тарифа например (2; 6) и (10; 22), для ночного тарифа (2; 7) и (10; 21). Найдите точку пересечения этих графиков. Проверьте полученный результат расчетами. Пересечение получилось в точке: (6; 14), $6 + 2 \cdot 4 = 14$ (евро), $7 + 1,75 \cdot 4 = 14$ (евро).
Ответ: поездка по дневному и ночному тарифам будет одинакова по цене на 6 км пути.

Схема оценивания

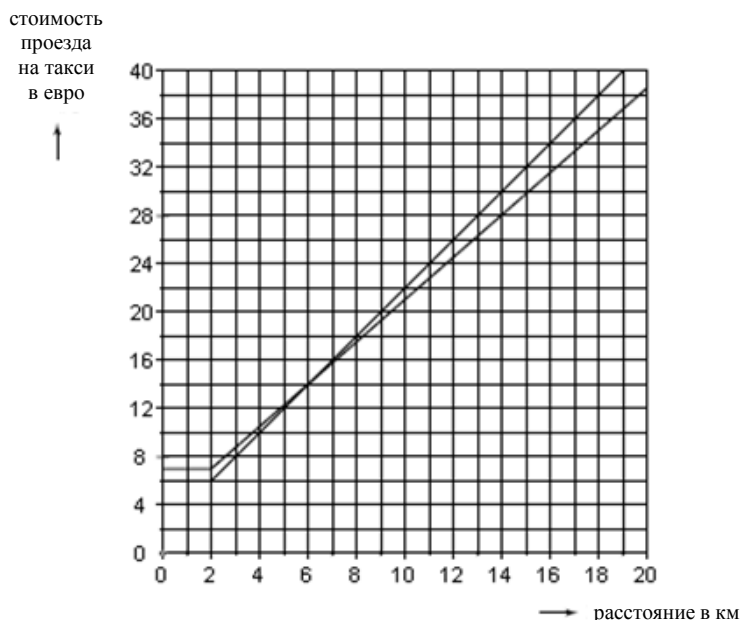
1. **Максимальное количество баллов 4**
 - Проезд обратно будет стоить в общей сложности $12,25 + 3 \cdot 2,50$ (евро) 1
 - 19,75 (евро) 1
 - На человека получается ($19,75 : 5 =$) 3,95 (евро) 1
 - Ислам платит на ($6,00 - 3,95 =$) 2,05 (евро) меньше 1
2. **Максимальное количество баллов 3**
 - При 12 км стоимость проезд 24,50 (евро) 1
 - При 13 км стоимость поездки 26,25 (евро) 1
 - Начиная с 13 км, поездка на такси стоит больше 25 евро или 1
 - Провести горизонтальную черту по 25 евро 1
 - Начиная с 13 км, поездка на такси стоит больше 25 евро 2

или

- Более $25 - 7 = 18$ евро за дополнительные километры 1
- $18 : 1,75 = 10,2\dots$ дополнительных километров 1
- Вместе с 2 км посадочного тарифа это будет минимум 13 (км) 1

3. Максимальное количество баллов 4

- Отметить как минимум две правильные точки на графике дневного тарифа.
Например, (2, 6) и (18, 38) 1
- Провести прямую линию по этим точкам 1



- Определить точку пересечения двух графиков 1
- Проверить, что при 6 км цена поездки при дневном и ночном тарифах 14 евро 1
- или
- Подсчитать цену проезда по дневному и ночному тарифу на несколько разных расстояний 1
- При расстоянии 6 км цена поездки по дневному тарифу $6 + 4 \cdot 2 = 14$ (евро) 1
- При расстоянии 6 км цена поездки по ночному тарифу $7 + 4 \cdot 1,75 = 14$ (евро) 1
- При расстоянии 6 км цена проезда по дневному и ночному тарифу одинаковая 1

Задание №8 Возрастной состав

Характеристика вопросов задания №8

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1		х				х	х			х		х		
2			х									х		
3			х											х

Задание №8 Возрастной состав

Для выполнения практического задания Жанна и Мирас исследовали возрастной состав всех учителей в своей школе. При этом они исходили из возраста на 1 января 2002 года. Результаты можно увидеть в нижеприведенной частотной таблице.

Возраст	Мужчина	Женщина
21	0	1
23	0	2
26	1	1
28	0	3
30	1	1
32	0	3
34	0	1
35	1	3
36	0	2
40	2	0
43	2	2
44	2	2

Возраст	Мужчина	Женщина
46	1	0
47	3	0
48	1	2
49	1	1
50	1	0
51	1	0
52	3	2
53	1	0
54	0	1
55	2	0
56	3	1
58	1	0

45	1	1
----	---	---

59	1	1
----	---	---

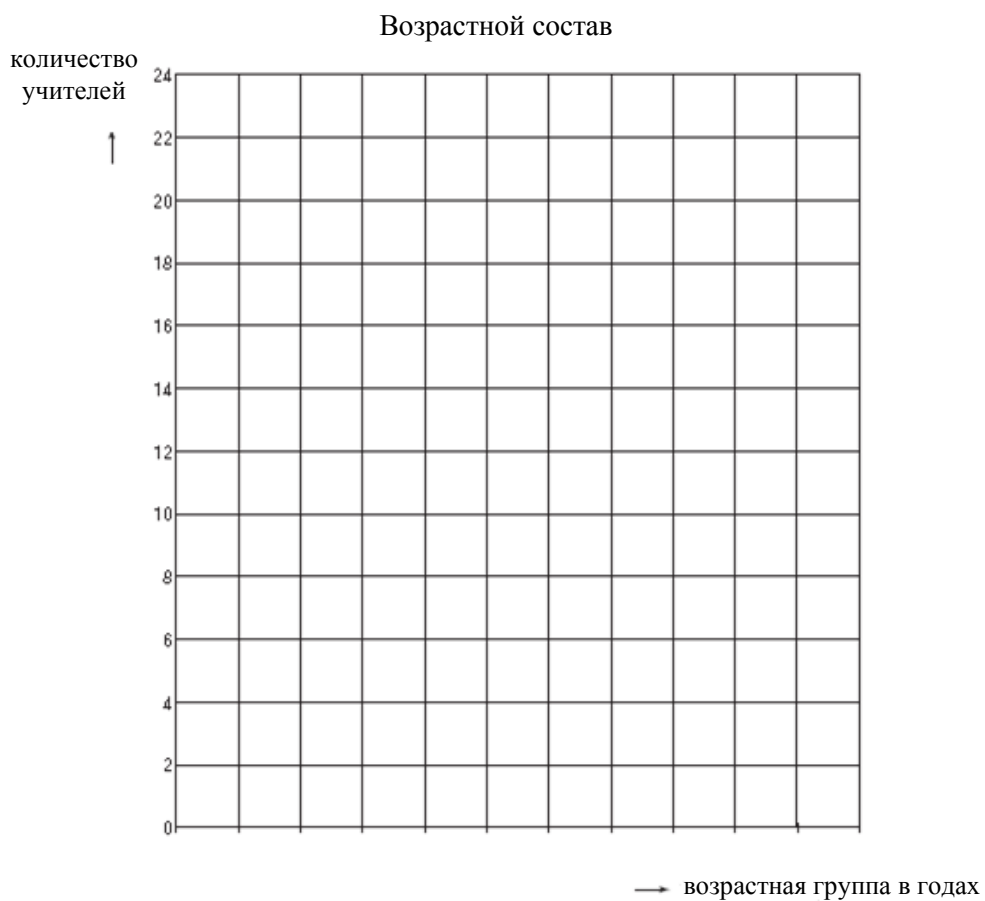
Всех учителей, работающих в школе на 1 января 2002 года, они разделили на возрастные группы по десять лет.

1. В бланке ответов к этому вопросу вы видите таблицу, которая относится к данному разделению.
→ Заполните таблицу.
2. Нарисуйте в бланке ответов к этому вопросу гистограмму, относящуюся к таблице.
3. Подсчитайте, сколько процентов учителей-женщин, работающих в школе на 1 января 2002 года, родились после 1 января 1968 года. Запишите свои расчеты.

1.

Возрастные группы	Количество учителей
20 - 29	8
30 - 39	
40 - 49	
50 - 59	

2.



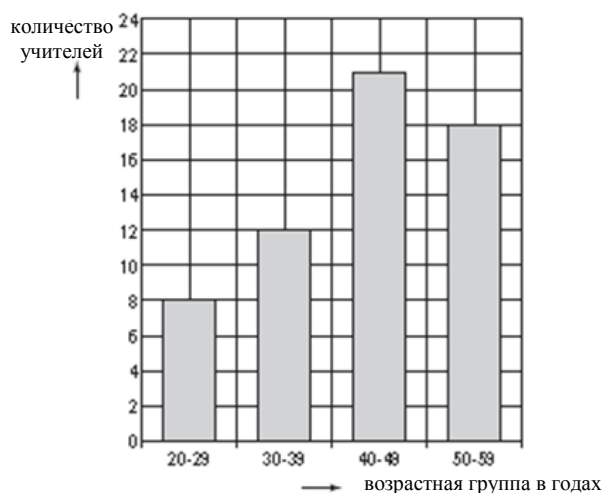
Рекомендации по выполнению задания

1. Внимательно изучите таблицу и посчитайте количество учителей, которое соответствует определенному возрасту:

Возрастные группы	Количество учителей
20 - 29	8
30 - 39	12
40 - 49	21
50 - 59	18

2. Нарисуйте гистограмму, где вертикальная ось – количество учителей, горизонтальная ось – возрастная группа учителей.

Пример правильной гистограммы:



3. $2002 - 1968 = 34$ года

1 января 2002 года этим учителям было 33 года или меньше

Посчитайте количество женщин, которым 33 года или меньше: 11 женщин

Всего женщин в школе - 30

$$\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 37\%.$$

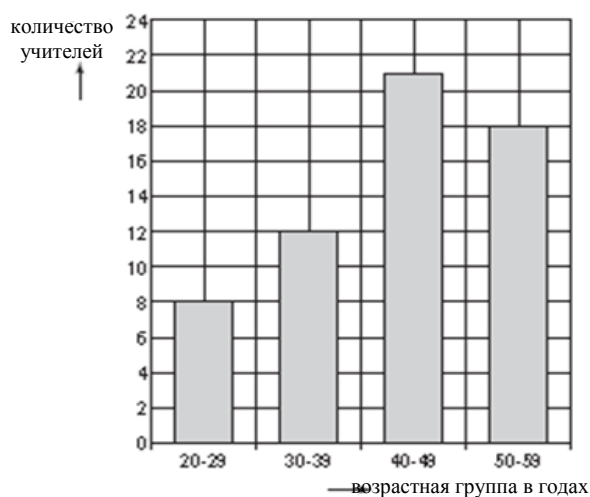
1. Максимальное количество баллов 3

Возрастные группы	Количество учителей
20 - 29	8
30 - 39	12
40 - 49	21
50 - 59	18

Примечание

Вычитать 1 балл за каждую ошибку или забытое количество.

2. Максимальное количество баллов 3



- Правильное разделение горизонтальной оси 1
- Правильная гистограмма 2

Примечания

Вычитать 1 балл за каждый неправильно нарисованный прямоугольник.

Ширина прямоугольников не имеет значения.

Если гистограмма нарисована с правильным распределением масштаба, то это тоже засчитывать как правильный ответ.

3. Максимальное количество баллов 5

- $2002 - 1968 = 34$ года 1
- 1 января 2002 года этим людям было 33 года или меньше 1
- 11 женщинам было 33 года или меньше 1
- Всего 30 женщин 1
- $\left(\frac{11}{30} \cdot 100\% = \right) 37(\%)$ (или 36,7%) 1

Задание №9 Питание

Характеристика вопросов задания №9

Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1			x				x	x				x		
2			x											x

Задание №9 Питание

В нижеприведенной таблице вы видите, сколько килоджоулей (кДж) энергии мы получаем из различных продуктов.

Вид продукта	Количество килоджоулей (кДж)
Кусок хлеба	336
Кусок сыра для 1 куска хлеба	462
Арахисовая паста	407
Масло для 1 куска хлеба	29
Маленькая упаковка апельсинового сока	336
Маленький пакетик чипсов	990
Одно яблоко	252
Один батончик Марса	1134

1. Человек ест кусок хлеба с маслом и сыром.
→ Покажите ниже своими расчетами, что этот бутерброд дает 827кДж энергии.

.....
.....

2. Перерыв на ланч.
Самат берет свою коробку для ланча.
В коробке для ланча находится следующее:
2 куска хлеба с маслом и сыром;
1 кусок хлеба с маслом и арахисовой пастой;
1 маленькая упаковка апельсинового сока и
1 яблоко.



Самат выпивает и съедает всё.
Затем он хочет съесть еще батончик Марса или пакетик чипсов.
Самат занимается дзюдо и ему нельзя набирать вес.
Ему можно съесть во время ланча продукты, дающие не более 4100 кДж.
→ Подсчитайте, что еще можно съесть Самату: батончик Марса или пакетик чипсов.

Запишите ниже свои расчеты.

.....
.....

Рекомендации по выполнению задания

1. Сложите количество килоджоулей продуктов данного бутерброда
 $336 + 462 + 29 = 827$ (кДж энергии).
2. Рассчитайте энергетическую ценность ланча Самата сложением энергетических ценностей продуктов, которые он выбрал:
 $2 \cdot 827 + 336 + 29 + 407 + 336 + 252 = 3014$.
 $4100 - 3014 = 1086$ еще может съесть маленький пакетик чипсов.

Схема оценивания

1. **Максимальное количество баллов 2**
 - $336 + 29 + 462$ 1
 - Это 827 (кДж) 1
2. **Максимальное количество баллов 5**
 - Один кусок хлеба с маслом и арахисовой пастой дает 772 (кДж) 1
 - $2 \times 827 + 772 + 336 + 252$ 1
 - 3014 (кДж) 1
 - $(4100 - 3014 =) 1086$ (кДж) 1
 - Самат может съесть еще пакетик чипсов 1

Задание №10 Конный спорт

Характеристика вопросов задания №10

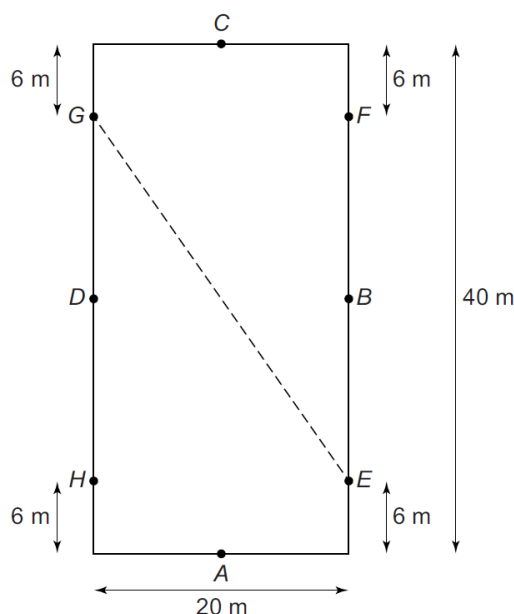
Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
	Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
1				х						х				х

Задание №10 Конный спорт

Выездка является одним из видов конного спорта. Делая упражнения по выездке, Анель выполняет на лошади различные фигуры на прямоугольном манеже.



На рисунке показан вид сверху прямоугольного манежа с указанными в метрах размерами. Точки A , B , C и D расположены посередине сторон прямоугольника.



1. Лошадь Анель идет прыжками (галопом) от точки G к точке E (смотрите пунктирную линию). Длина одного прыжка 2,85 м. Подсчитайте, сколько прыжков необходимо сделать лошади, чтобы преодолеть расстояние от G до E . Напишите свои расчеты.

Рекомендации по выполнению задания

1. Мысленно соедините точки H и E . В полученном прямоугольном треугольнике рассчитайте сторону $GH = 40 - 6 - 6 = 28$ м, $HE = 20$ м. Примените теорему Пифагора для расчета гипотенузы $GE = \sqrt{28^2 + 20^2} = \sqrt{784 + 400} = \sqrt{1184} \approx 34,4$ м; разделите это число на длину одного прыжка и получите число прыжков лошади: $34,4 : 2,85 \approx 12$.

Схема оценивания

- | | |
|---|---|
| 1. Максимальное количество баллов 5 | |
| • $GH = (40 - 6 - 6 =) 28$ (м) | 1 |
| • $GE^2 = 28^2 + 20^2$ | 1 |
| • $GE = (\sqrt{1184} =) 34,4 \dots$ (м) | 1 |
| • Количество прыжков $= \frac{34,4}{2,85} = 12,07 \dots \approx 12$ | 1 |
| • 12 прыжков | 1 |

2.1. СПИСОК ФОРМУЛ

Окружность круга = $\pi \cdot$ диаметр

Площадь круга = $\pi \cdot$ радиус²

Объем призмы = площадь основания \cdot высота

Объем цилиндра = площадь основания \cdot высота

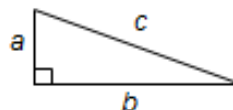
Объем конуса = $\frac{1}{3} \cdot$ площадь основания \cdot высота

Объем пирамиды = $\frac{1}{3} \cdot$ площадь основания \cdot высота

Объем шара = $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot$ радиус³

Для прямоугольного треугольника с катетами a , b и гипотенузой c (смотрите рисунок) действительна
Теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМЕРОВ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

Источник	Название контекста	Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
			Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
Математика 1991-1	МАРАФОН	1		x			x					x			x	
		2			x											x
Математика vmbo gl/tl, 2003-1	ШОКОЛАД	1			x	x					x				x	
		2			x										x	
		3			x											x
Математика vmbo gl/tl, 2003-1	МАЯК	1		x			x		x			x		x		
		2			x											x
		3			x											x
Математика havo A1,2 2004-1	ЧЕТЫРЕ ВАРИАНТА ВЫБОРА	1			x			x	x			x			x	
		2			x											x
		3			x											x
Математика vmbo gl/tl 2004-1	ВОСЬМИГРАННЫЕ ИГРАЛЬНЫЕ КОСТИ	1		x				x		x				x		
		2			x										x	
		3			x											x
Математика vmbo gl/tl 2010-1	ФАСАДНЫЙ ФЛАГ	1			x	x					x				x	
		2			x										x	

Источник	Название контекста	Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
			Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
Математика vmbo gl/tl 2011-1	ТАРИФЫ ТАКСИ	1			x		x					x			x	
		2			x										x	
		3			x											x
Математика vmbo gl/tl 2004-2	ВОЗРАСТ НОЙ СОСТАВ	1		x				x	x			x		x		
		2			x									x		
		3			x											x
Математика vmbo bb 2004-2	ПИТАНИЕ	1			x				x	x				x		
		2			x											x
Математика vmbo gl/tl 2013-2	КОННЫЙ СПОРТ	1				x						x				x

Источник	Название контекста	Номер вопроса	Типы вопросов			Область применения PISA				Контекст				Компетенция		
			Вопросы с множественным выбором	Вопросы, требующие короткого ответа	Вопросы, требующие развернутого ответа	Пространство и форма	Изменения и отношения	Неопределенность и данные	Количество	Личное	Профессиональное	Публичное	Научное	Формулирование	Применение	Интерпретация
PISA 2012	Скорость капель	PM903Q01			x		x				x				x	
PISA 2012	Скорость капель	PM903Q03		x			x				x				x	
PISA 2012	Парусники	PM923Q03	x			x							x		x	
PISA 2012	Колесо обозрения	PM934Q02		x		x						x		x		
PISA 2012	Какая машина?	PM985Q01	x					x		x						x

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD-Bèta Press.
2. De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.
3. De Lange, J. (1995). Assessment: No Change without Problems. In T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics* (pp. 87-172). Albany, NY: SUNY Press.
4. Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht: CD-Bèta Press.
5. Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-Bèta Press.
6. Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
7. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
8. Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
9. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
10. Goddijn, A., Kindt, M., Reuter, W., & Dullens, D. (2004). *Geometry with Applications and Proofs*. Utrecht: Freudenthal Institute.
11. Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute.
12. Kindt, M. (2010). *Positive algebra*. Utrecht: Freudenthal Institute.
13. Sembiring, R.K., Hadi, S., & Dolk, M. (2008). Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40(6), 927-939.
14. Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant*, 5(1), 60-67.
15. Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

16. Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1-2), 109-135.
17. Streefland, L. (1996). Learning from history for teaching in the future. Regular lecture held at the ICME-8 in Sevilla, Spain; in 2003 posthumously published in *Educational Studies in Mathematics*, 54, 37-62.
18. Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
19. Treffers, A. (1987a). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
20. Treffers, A. (1987b). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 125-145.
21. Van den Brink, F.J. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen* [Realistic mathematics education for young children]. Utrecht: OW&OC, Universiteit Utrecht. 6
22. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
23. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.
24. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.)(2008). *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*.
25. Rotterdam/Tapei: Sense Publishers.
26. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 1-25). Fremantle: MERGA.
27. Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.) (2006). *Mathematics in Context*. Chicago: Encyclopaedia Britannica.
28. Cito (2013). *Resultaten PISA-2012: Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen*. Nederlandse uitkomsten van het Programme for International Student Assessment (PISA) op het gebied van wiskunde, natuurwetenschappen en leesvaardigheid in het jaar 2012. Arnhem: Cito.

29. OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris: OECD.
30. Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (in press). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Heidelberg: Springer-Verlag GmbH.